УДК 168. 521

С.И. МАСАЛОВА

ФИЛОСОФИЯ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Рассматриваются основные философские проблемы интуиционистской математики, возникшие в конце XIX-начале XX века. К ним относятся проблемы существования в математике, обоснования математики, гносеологических способов построения математических объектов, методологии математики и др. Рассматриваются этапы эволюции математической теории – полуинтуиционизм, собственно интуиционизм, ультраинтуиционизм.

Ключевые слова: *философия математики, теория множеств, парадокс, кризис оснований математики, полуинтуиционизм, эффективизм, собственно интуиционизм, ультраинтуиционизм, потенциальная бесконечность, актуальная бесконечность, абстракция отождествления, интуиционистская логика, конструктивизм.*

Введение. Современная философия математики как философская наука рассматривает проблемы, волнующие современную постнеклассическую науку, с позиций эволюционной эпистемологии. В рамках классической эпистемологии, которой соответствует адекватная математическая база в форме теории множества, сложились достаточно жесткие характеристики объекта и субъекта в рамах субъектно-объектных отношений. При этом абсолютизация противопоставления объекта и субъекта приводила к «затемнению» бытийной, онтологической связи человека с миром. В эпистемологии времен постнеклассической науки (рубеж XX-XXI вв.) произошел переход от указанных жестких характеристик объекта и субъекта к новому видению, более гибкому, динамичному, комплексному, согласно которому гносеологический субъект наполняется новым «земным» содержанием, лишается абсолютной власти своей жесткой абстрактности, предстает как наполненный чувствами, интуитивный, волнующийся, ошибающийся субъект познающий в реальном пространстве-времени. Происходит переход от гносеологического субъекта к эмпирическому. В этом суть современного антропологического поворота, своеобразно реализованного философией интуиционистской математики.

Постановка задачи. Математическая основа постнеклассической науки и постнеклассического типа рациональности представлена интуиционистской математикой, которая в условиях хаотического состояния и неопределенности по преодолению кризиса оснований математики решает философские проблемы. В частности, философия интуиционистской математики впервые раскрыла конструктивные возможности математика как изобретательного, творческого субъекта – создавать гибкую методологию познания, включать моменты иррационального (интуиции) в рациональный научный поиск, творить математическую теорию на основе специально сконструированных субъектом и имеющих определенные границы применимости принципов и методов. Тем самым субъект от состояния теоретической неопределенности приходит не только к конкретной теоретической (математической), но и философско-методологической определенности. Кроме то-

го, необходимо показать специфику решения философией интуиционистской математики основных философских проблем (бесконечности, существования и построения математических объектов и др.).

Результаты исследования и их обсуждение. Математика как наука о формах и отношениях, взятых в отвлечении от их содержания, прошла длительный путь исторического развития, включающий этапы как эволюционные, так и революционные, которым предшествуют переходные. Такое неравномерное развитие математической теории обусловлено тем, что в математике существует достаточно много проблем, которые необходимо решать для успешного развития математической теории и практики. Эти проблемы могут иметь как узковнутринаучный для математики характер, так и стать проблемой философии математики.

Собственно математические проблемы можно сформулировать следующим образом: роль формализации в математике; роль аксиоматического метода; роль логики и ее законов (в особенности закона исключенного третьего) в математике; проблема непротиворечивости и полноты математической теории; проблемы и значение теории множества для математики; понимание природы и роли абстракций актуальной и потенциальной видов бесконечности и др. Проблемы философии математики тесно связаны с узкоматематическими проблемами, но они являются именно философскими (решают проблемы онтологии, гносеологии, методологии), не учитывающими специфику математической практики, включающей в себя, согласно Ф. Китчеру, пять компонентов: язык; множество принятых предложений; множество принятых способов рассуждения; множество принятых в качестве важных вопросов; множество метаматематических взглядов (стандарты доказательства и определения, а также утверждения о сфере и структуре математики). [1]

К *основным проблемам философии математики* относятся: проблема реальности; проблема существования математических объектов; проблема обоснования математики; проблема природы математического познания; проблема связи между математикой, языком, логикой; проблема единства математики; природа, методы и стили математического мышления и др. Проблемы свидетельствуют о противоречивости и даже кризисах в развитии науки, обусловленных сложностью ее проблем, различным их пониманием и интерпретацией в различные исторические периоды. Кризисы случались неоднократно, наиболее значителен кризис в естествознании на рубеже XIX-XX столетий. Он связан с кризисом перехода не только к новой квантово-механической научной картине мира, но и с кризисом в философии как методологии частных наук, а именно в материалистической методологии *метафизического* варианта, потребовавшей коренной перестройки материалистической методологии естествознания на *диалектический* вариант.

Не обошел этот кризис и математику. В конце XIX века за открытой Г. Кантором теории множеств прочно утвердилась репутация теоретического фундамента всего здания классической математики. Но с обнаружением ее парадоксов на рубеже XIX – начала XX вв. возник кризис и теории множеств, и оснований математики. Эти парадоксы, привлекшие пристальное

внимание не только математиков, но и логиков, делились на две группы: 1) группа парадоксов о трансфинитных кардинальных и ординальных числах относилась к *парадоксам логики и математики* (парадоксы Кантора, Бурали-Форти, Рассела-Цермелло), так как они включали только математические или логические термины (множество, класс, кардинальные и ординальные числа и др.); устранение таких парадоксов требовало пересмотра некоторых принципов математики и логики; 2) группа *семантических парадоксов* связана с использованием языка, разрешение их возможно лишь путем реконструкции существующего естественного языка и устранения в нем двусмысленных и неопределенных выражений. [2]

Парадоксы сыграли роль аттрактора, привлекшего внимание математиков к определенным узким проблемам. Появилась необходимость переосмысления всех ранее известных теорий, пересмотра концепции существования в математике и обоснования ее с новых позиций. Парадоксы сыграли как отрицательную (подвергли сомнению научное совершенство теории, в которой парадокс обнаружен, т.е. канторовской теории множеств), так и положительную роль (способствовали в стремлении освободиться от парадокса и в стремлении к совершенствованию математической теории в целом). Исследование парадоксов теории множеств направило математическую мысль на поиски решения антиномий, что привело к интересным открытиям в основаниях логики и математики. В исследованиях по философским основаниям математики также сложилось множество новых направлений, дающих свое понимание развитию эпистемологических аспектов математического познания. Одно из них – интуиционизм.

Рассмотрим трактовку некоторых философско-математических проблем и специфику взглядов философии интуиционистской математики на их решение.

Интуиционизм прошел ряд этапов в своей эволюции – полуинтуиционизм, собственно интуиционизм, ультраинтуиционизм. На разных этапах математиков волновали разные проблемы, но одной из основных проблем математики является *проблема бесконечности.* Математические понятия бесконечности, непрерывности служили предметом философского анализа с момента их появления (идеи атомистов, апории Зенона Элейского, инфинитезимальные методы в античности, исчисление бесконечно малых в Новое время и пр.). Наибольшие споры вызывало применение различных видов бесконечности (потенциальной, актуальной) как математических объектов и их интерпретация. Все эти проблемы, на наш взгляд, были порождены более глубокой проблемой – о роли субъекта в научном познании. Дело в том, что состояние кризиса в математике порождено эпистемологической неопределенностью соизмерения мира объекта (бесконечности) и мира субъекта. Математик как субъект имеет возможность выбора средств познания – или потенциальной, или актуальной бесконечности. Применение потенциальной бесконечности *как становящейся,* дает ему возможность осуществлять, конструировать бесконечное множество построений, которые можно надстраивать над конечными, не имея конечного шага, *не завершая* построение, оно только *возможно*. Применение актуальной бесконечности дает ему возможность работать с бесконечностью

как с *уже осуществимой*, *завершенной* в своем построении, как актуально данной одновременно.

На этапе *полуинтуиционизма* проблема бесконечности еще не была самостоятельной, а была вплетена в проблему построения математических объектов и способов его обоснования. Полуинтуиционизм А. Пуанкаре и представителей парижской школы теории функций Бэра, Лебега и Бореля был направлен против принятия аксиомы свободного выбора, с помощью которой доказывается теорема Цермело, утверждавшая, что всякое множество можно сделать вполне упорядоченным, но без указания теоретического способа определения элементов любого подмножества искомого множества. Нет способа построения математического объекта, нет и самого математического объекта. Математики считали, что наличие или отсутствие теоретического способа построения последовательности объектов исследования может служить основой обоснования или опровержения этой аксиомы. В российском варианте полуинтуиционистская концепция в философских основаниях математики получила развитие в таком направлении, как *эффективизм,* развиваемый Н.Н. Лузиным.

Эффективизм представляет собой оппозицию к основным абстракциям учения множества Кантора о бесконечном - актуальности, выбора, трансфинитной индукции и др. Для эффективизма гносеологически более ценными абстракциями является абстракция потенциальной осуществимости, чем абстракция актуальной бесконечности. Благодаря этому становится возможным введение понятия о трансфинитных ординалах (бесконечных порядковых числах) на основе эффективного понятия о росте функций. Гносеологическая установка эффективизма для отображения непрерывного (континуума) опиралась на дискретные средства (арифметики) и созданную Н.Н.Лузиным дескриптивную теорию множеств (функций).

Интуиционизм Л. Э. Я. Брауэра, Г. Вейля, А. Гейтинга в качестве традиционного объекта исследования видит свободно становящиеся последовательности различных видов. На этом этапе, решая собственно математические проблемы, в том числе о перестройке всей математики на новой основе, интуиционисты подняли философский вопрос о роли математика как познающего субъекта. Каково его положение, где он более свободен и активен в выборе средств познания? Интуиционисты первыми (и на этапе полуинтуиционизма) стали критиковать концепцию актуальной бесконечности, канторовскую теорию множеств, усмотрев в ней ущемление возможностей субъекта влиять на процесс научного поиска решения конструктивной задачи. В случае использования *потенциальной* бесконечности субъект себя не обманывает, так как для него идея потенциальной бесконечности интуитивно значительно яснее, чем идея актуальной бесконечности. [2] Для интуициониста объект считается существующим, если он дан непосредственно математику или известен метод его построения, конструирования. Субъект в любом случае может приступить к процессу достраивания ряда элементов своего множества. Непостроенный объект для интуиционистов не существует. В то же время субъект, работающий с *актуальной* бесконечностью, будет лишен этой возможности и будет чувствовать двойную уязвимость принятой позиции: 1) никогда нельзя осуществить это

бесконечное построение; 2) он принимает решение оперировать с актуальной бесконечностью как с конечным объектом и в этом случае теряет свою специфику понятия бесконечности. Интуиционизм сознательно ограничивает возможности математика тем, что тот может осуществлять построение математических объектов исключительно посредством таких средств, которые хотя и получаемы с помощью абстрактных понятий, но эффективны, убедительны, доказуемы, функционально конструктивны именно практически и сами интуитивно ясны как конструкции, построения, надежность которых на практике не вызывает никаких сомнений. Интуиционизм, опираясь на понятие *потенциальной* бесконечности и конструктивные методы исследования, имеет дело с математикой *становления*, теория множеств относится к математике *бытия.* [2]

Для интуициониста Брауэра как представителя математического эмпиризма логика вторична, он критикует ее и закон исключённого третьего, отвергает использование идеи актуальной бесконечности; главное для него - интерпретация и обоснование практически используемых логических средств и математических рассуждений. Принятое интуиционистами ограничение преодолевает неопределенность использования понятия бесконечности в математике и выражает стремление преодолеть кризис в основании математики.

Ультраинтуиционизм (А.Н. Колмогоров, А.А.Марков и др.) – последняя стадия развития интуиционизма, на которой модернизируются, существенно дополняются и преобразуются основные его идеи, не изменяя его сущности, но преодолевая недостатки и усиливая позитивные стороны, руководствуясь критериями математической строгости.

Слабостью подхода интуиционистов было узкое понимание роли интуиции как единственного источника обоснования правильности и эффективности математических методов. Принимая «интуитивную ясность» в качестве критерия истинности в математике, интуиционисты методологически обедняли возможности математика как субъекта познания, сводили его деятельность лишь к мыслительным операциям на основе интуиции и не включали практику в процесс математического познания. Ультраинтуиционистская программа обоснования математики является российским приоритетом. Поэтому отечественные математики, преодолевая ограниченность интуиционизма, принимали действенной методологию материалистической диалектики, признающей человеческую практику источником формирования как математических понятий, так и математических методов (умозаключений, построений). Проблему существования математических объектов ультраинтуиционисты решали, опираясь уже не на неопределяемое субъективное понятие интуиции, а на математическую практику и конкретный механизм построения математического объекта – алгоритм, выражаемый вычислимой, рекурсивной функцией. Ультраинтуиционизм усиливает достоинства интуиционизма, заключающиеся в возможности упорядочивания и обобщения приемов решения конструктивных проблем, употребляемых математиками любого направления. Поэтому интуиционизм последней стадии (ультраинтуиционизм) близок конструктивизму в математике.

В *гносеологическом* аспекте основные идеи и принципы ультраинтуиционизма таковы: критика классической аксиоматики логики; использование и значительное усиление (по явному указанию А.А. Маркова) роли абстракции отождествления (мысленного отвлечения от несходных свойств предметов и одновременного вычленения общих свойств предметов) как способа построения и конструктивного понимания абстрактных понятий, математических суждений; доказательство непротиворечивости непротиворечивых теорий. В *формальном* аспекте применение абстракции отождествления оправдывается тремя ее свойствами (аксиомами) равенства — рефлексивности, транзитивности и симметрии.

Для решения основного противоречия в математике по проблеме бесконечности, породившего кризис ее оснований, на этапе ультраинтуиционизма в работах А.Н. Колмогорова были предложены пути выхода из кризиса посредством решения проблемы отношений между классической и интуиционистской логикой, классической и интуиционистской математикой. Интуиционизм Брауэра в целом отрицал логику, но так как любой математик не может обойтись без логики, в интуиционизме все-таки сохранилась практика логических рассуждений, допускались некоторые принципы классической логики, имеющей в качестве своей базы аксиоматику. С.К. Клини, Р. Весли даже отмечают, что интуиционистскую математику можно описать в виде некоторого исчисления [3], а исчисление является способом организации математического знания на основах логики, формализации и ее формы – алгоритмизации. Новый вариант соотношения логики и математики в рамках интуиционистских требований к интуитивной ясности суждений, особенно тех, которые включали отрицание, А.Н. Колмогоров предложил следующим образом: интуиционистскую логику, тесно связанную с интуиционистской математикой, он представил в форме аксиоматического *импликативного минимального* исчисления высказываний и предикатов. Тем самым ученый представил новую модель математического знания, преодолевающую ограниченность интуиционизма в признании лишь интуиции как средства познания и ограниченность логицизма, абсолютизирующего возможности логики в математике. Эта позиция позволила в математической форме продемонстрировать синтез интуитивного и логического как основы гибкой рациональности и ее конструктивной эффективности.

Выводы. Таким образом, эпистемологический аспект математического познания позволяет оценить революционные изменения на этапе кризиса оснований математики на рубеже XIX-XX вв. с новых позиций в понимании процесса познания, природы и роли субъекта в нем. Гносеологический субъект традиционной теории познания, соответствующий периоду господства теоретико-множественного подхода в математике, – это абстрактный, неполный, «частичный» субъект, представленный в субъектно-объектных отношениях, оторванный абстракциями, логикой, формализмом от действительности, рационально, теоретически познающий свой объект и понимаемый как зеркало, точно отражающее и копирующее действительность. По сути, субъект исключался из познания как реального процесса и результата взаимодействия с объектом. Выход интуиционизма на арену борьбы фило-

софских направлений в математике привел к новому пониманию математика как субъекта познания - человека познающего, философская абстракция которого должна быть выстроена как бы заново. Математик предстал как эмпирический субъект, понимаемый уже как целостный реальный человек, включающий все те свойства, от которых отвлекались в гносеологическом субъекте, – эмпирическую конкретность, изменчивость, историчность; это действующий и познающий в реальном познании, творческий, интуитивный, изобретательный субъект. Философия интуиционистской математики стала базой, фундаментом современной эпистемологической парадигмы, построенной на концепции гибкой рациональности, в которой человек – это цельный (целостный) субъект познания, обладающий новыми познавательными качествами, методами, процедурами; он синтезирует свою как абстрактно-гносеологическую и логико-методологическую природу и форму, так и одновременно получает экзистенциально-антропологическое и «историко-метафизическое» осмысление.

Библиографический список

1. Kitcher Ph. The nature of mathematical knowledge. // Journal Philosophy. – 1977. – V. 74.

2. Рузавин Г.И. О природе математического знания. – М.: Мысль, 1968. – 302 с.

3. Клини С.К., Весли Р. Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций / Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 330 с.

Материал поступил в редакцию 19.07.06.

S.I. MASALOVA

THE PHILOSOPHY OF INTUITIONIST MATHEMATICS

The article covers the main problems of intuitionist mathematics which appeared in the late 19th century-early 20th century. Among them are the problems of existence in mathematics, the problem of substantiation of mathematics, epistemological methods of mathematical objects construction, methodology of mathematics and others. Such stages of mathematical theory development as half-intuitionism, intuitionism proper and ultra-intuitionism are considered.

МАСАЛОВА Светлана Ивановна, доцент кафедры философии, теологии и культурологии Ростовского государственного педагогического университета, кандидат философских наук (1980).
Научные интересы в области философии науки.
Имеет 45 опубликованных работ.